第 24 講　積分でやっておくこと（その２）

24

［A］ e を自然対数の底とする．

（1） $x>0$ で $f(x)=-\dfrac{1}{2x}e^{-x^2}+\dfrac{1}{4x^3}e^{-x^2}$，$g(x)=-\dfrac{1}{2x}e^{-x^2}$ とする．

$f'(x)\leqq e^{-x^2}\leqq g'(x)$ を証明せよ．

（2） $\dfrac{1}{4e}\leqq\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^n e^{-x^2}dx\leqq\dfrac{1}{2e}$ を証明せよ．

（3） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}ne^{n^2}\int_n^{n+1}e^{-x^2}dx$ を求めよ．

［B］ n を自然数とする．

（1） $\displaystyle\int_1^n \log x\,dx$ を求めよ．

（2） 任意の自然数 n に対して，不等式

$$\frac{\log 1+\log 2+\cdots+\log n}{n}-\log n+1>0$$

が成り立つことを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第24講　積分でやっておくこと（その2）

24　k を正の整数とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\dfrac{\log k+\log(k+1)}{2}<\displaystyle\int_k^{k+1}\log x\,dx<\log(k+1)$ を示せ．

(2)　$e\sqrt{\dfrac{k}{k+1}}<\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k<e$ を示せ．ただし，e は自然対数の底とする．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 24 講　積分でやっておくこと（その２）

24

［A］ e を自然対数の底とする.

(1) $x>0$ で $f(x)=-\dfrac{1}{2x}e^{-x^2}+\dfrac{1}{4x^3}e^{-x^2}$，$g(x)=-\dfrac{1}{2x}e^{-x^2}$ とする.

$f'(x)\leqq e^{-x^2}\leqq g'(x)$ を証明せよ.

(2) $\dfrac{1}{4e}\leqq\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^n e^{-x^2}dx\leqq\dfrac{1}{2e}$ を証明せよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}ne^{n^2}\int_n^{n+1}e^{-x^2}dx$ を求めよ.

［B］ n を自然数とする.

(1) $\displaystyle\int_1^n\log x\,dx$ を求めよ.

(2) 任意の自然数 n に対して，不等式

$$\frac{\log 1+\log 2+\cdots+\log n}{n}-\log n+1>0$$

が成り立つことを示せ.

【答】 ［A］ (1) 略　(2) 略　(3) $\dfrac{1}{2}$

［B］ (1) $n\log n-n+1$　(2) 略

【解説】

［A］ (1) $f(x)=-\dfrac{1}{2x}e^{-x^2}+\dfrac{1}{4x^3}e^{-x^2}$ より

$$f'(x)=\frac{1}{2x^2}e^{-x^2}+e^{-x^2}-\frac{3}{4x^4}e^{-x^2}-\frac{1}{2x^2}e^{-x^2}$$

$$\iff\quad e^{-x^2}-f'(x)=\frac{3}{4x^4}e^{-x^2}>0$$

$g(x)=-\dfrac{1}{2x}e^{-x^2}$ より

$$g'(x)=\frac{1}{2x^2}e^{-x^2}+e^{-x^2}$$

$$\iff\quad g'(x)-e^{-x^2}=\frac{1}{2x^2}e^{-x^2}>0$$

よって

$$f'(x)\leqq e^{-x^2}\leqq g'(x)$$

(2) (1)より　$n\to\infty$ より　$n\geqq 2$ とすると

$$\int_1^n f'(x)dx<\int_1^n e^{-x^2}dx<\int_1^n g'(x)dx$$

$$\iff\quad \Big[f(x)\Big]_1^n<\int_1^n e^{-x^2}dx<\Big[g(x)\Big]_1^n$$

$$\iff\quad f(n)-f(1)<\int_1^n e^{-x^2}dx<g(n)-g(1)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ここで

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\{f(n)-f(1)\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2ne^{n^2}}+\frac{1}{4n^3e^{n^2}}+\frac{1}{4e}\right)\\&=\frac{1}{4e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\{g(n)-g(1)\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2ne^{n^2}}+\frac{1}{2e}\right)\\&=\frac{1}{2e}\end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{4e}\leqq\lim_{n\to\infty}\int_1^n e^{-x^2}dx\leqq\frac{1}{2e}$$

(3)　(1)より　$n>0$ のとき

$$\int_n^{n+1}f'(x)dx<\int_n^{n+1}e^{-x^2}dx<\int_n^{n+1}g'(x)dx$$

$$\iff\quad f(n+1)-f(n)<\int_n^{n+1}e^{-x^2}dx<g(n+1)-g(n)$$

ここで

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}ne^{n^2}\{f(n+1)-f(n)\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{ne^{n^2}}{2(n+1)e^{(n+1)^2}}+\frac{ne^{n^2}}{4(n+1)^3e^{(n+1)^2}}+\frac{ne^{n^2}}{2ne^{n^2}}-\frac{ne^{n^2}}{4n^3e^{n^2}}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{2n+1}}+\frac{1}{4(n+1)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{2n+1}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4n^2}\right\}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}ne^{n^2}\{g(n+1)-g(n)\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{ne^{n^2}}{2(n+1)e^{(n+1)^2}}+\frac{ne^{n^2}}{2ne^{n^2}}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{2n+1}}+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}ne^{n^2}\int_n^{n+1}e^{-x^2}dx=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ (1)

$$\int_1^n \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_1^n$$
$$= \boldsymbol{n\log n - n + 1}$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}\log k$ を $y=\log x$ のグラフと x 軸，$x=n$ で囲まれた部分の面積と比較すると

$$\sum_{k=1}^{n}\log k > \int_1^n \log x\,dx$$

$$\iff \sum_{k=1}^{n}\log k > n\log n - n + 1$$

$$\therefore\ \frac{\sum_{k=1}^{n}\log k}{n} - \log n + 1 > \frac{1}{n}$$

よって題意が示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 24 講　積分でやっておくこと（その２）

24　k を正の整数とする．次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\log k+\log(k+1)}{2}<\displaystyle\int_k^{k+1}\log x\,dx<\log(k+1)$ を示せ．

(2) $e\sqrt{\dfrac{k}{k+1}}<\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k<e$ を示せ．ただし，e は自然対数の底とする．

【答】　略

【解説】

(1) $\dfrac{d}{dx}(\log x)=\dfrac{1}{x}>0$，$\dfrac{d^2}{dx^2}(\log x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ より $y=\log x$ のグラフは上に凸の増加関数のグラフであるので，A$(k,\ 0)$，B$(k+1,\ 0)$，C$(k+1,\ \log(k+1))$，D$(k,\ \log(k+1))$，E$(k,\ \log k)$ としたときの長方形 ABCD，台形 ABCE の面積と比較することにより

$$\frac{\log k+\log(k+1)}{2}<\int_k^{k+1}\log x\,dx<\log(k+1)$$

を得る．

(2)
$$\int_k^{k+1}\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_k^{k+1}=(k+1)\log(k+1)-k\log k-1$$

と(1)の結果より

$$\begin{cases}\dfrac{\log k+\log(k+1)}{2}<\displaystyle\int_k^{k+1}\log x\,dx\\[2mm] \displaystyle\int_k^{k+1}\log x\,dx<\log(k+1)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}(2k+1)\{\log(k+1)-\log k\}>2\\ k\{\log(k+1)-\log k\}<1\end{cases}$$

$$\iff \frac{2}{2k+1}<\log(k+1)-\log k<\frac{1}{k}$$

$$\iff \frac{2k}{2k+1}<\log\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<1$$

$$\iff e^{\frac{2k}{2k+1}}<\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<e$$

ここで

$$e^{\frac{2k}{2k+1}}<\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

$$\iff e<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k\cdot\frac{2k+1}{2k}}$$

$$\iff e<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}}$$

$$\iff e\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}}<\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

$$\iff e\sqrt{\frac{k}{k+1}}<\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

となるので題意は示された．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。